961. 代數方程式ノ根ノ限界ニ就イテ

春木　博（神商船）

n 次ノ代數方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ ノ任意ノ根ヲ α トスルトキ，$|\alpha|\leqq 1$ ナルタメノ十分條件トシテ色々アルガ、ヨク知ラレタモノヲアゲレバ

(i)　$|a_0|\geqq|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|$

(ii)　$a_0\geqq a_1\geqq a_2\geqq\cdots\cdots\geqq a_n>0$

ガアル。

今，次ニ一ツノ十分條件ヲ述ベテ見ヨウ。

ソノ條件ハ，$p>0$，$q>0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ナル p,q ニ對シ

(iii)　$|a_0|\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}n^{\frac{1}{q}}$

（證明）$|\alpha|>1$ ナル根アリトスレバ

$$|f(\alpha)|\geqq|a_0||\alpha|^n-(|a_1||\alpha|^{n-1}+\cdots\cdots+|a_n|)$$

右辺ニ Hölder ノ不等式ヲ用フレバ $p>0$，$q>0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ナル p,q ニ對シ

$$|f(\alpha)|\geqq|a_0||\alpha|^n-\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha|^{(i-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$|\alpha|>1$ ナル故　$|\alpha|^n>|\alpha|^{n-1}$

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha|^{(i-1)q}<n|\alpha|^{(n-1)q}$$

故ニ $|f(\alpha)| > |a_0||\alpha|^{n-1} - \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}} |\alpha|^{n-1}$

故ニ $|f(\alpha)| > |\alpha|^{n-1} \left\{ |a_0| - \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}} \right\} \geqq 0$

シカルニ $f(\alpha)=0$ ナル故，之レハ矛盾デアル。

(註) (iii) ニ於テ $p \to 1$ ナラシメレバ (i) ガ出ル。

——— (完) ———